UESB-UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA

$5^{\underline{0}}$ **Lista de exercícios de Álgebra Linear**

1. Encontre os autovalores e os autovetores dos operadores lineares abaixo:
   (a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$
   (b) $T(x, y) = (-x, -y)$
   (c) $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$
   (d) $T(x, y, z) = (2x + y + 3z, 4y + 2z, 10y - 4x)$
   (e) $T(at^2 + bt + c) = at^2 + ct + b$
   (f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) : T(A) = A^t$

2. Ache as multiplicidades dos autovalores do operador linear $wT(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.

3. Considere $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, onde $B = \{(1, -1); (0, 1)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$. Ache os autovalores e os autovetores de T.

4. Ache os autovalores e os autovetores do operadore linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por $T(e_1) = (2, 0, 0), T(e_2) = (2, 1, 2)$ e $T(e_3) = (3, 2, 1)$.

5. Ache os autovalores e os autovetores dos operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ definidos pelas matrizes abaixo:
   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

6. Ache as multiplicidades dos autovalores da questão anterior.

7. Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que T tenha os autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(-3, 1); (-2, 1)$, respectivamente.

8. Ache os autovalores das matrizes abaixo:
   (a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

9. Verifique quais os operadores lineares abaixo são diagonalizáveis:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y + 2z, z)$

   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 / T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida pela matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (e) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R}) / T(at^2 + bt + c) = 2at^2 + 2(b + c)t + c$

   (f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}) / T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 4d \end{pmatrix}$

10. Ache a forma canônica das seguintes matrizes:

    (a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

    (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. Considere uma matriz A de ordem 9 possuindo 4 autovalores distintos tais que $m_a(\lambda_1) = 3, m_g(\lambda_1) = 1, m_a(\lambda_2) = 3, m_g(\lambda_2) = 2, m_a(\lambda_3) = 2, m_g(\lambda_3) = 1$ e $m_a(\lambda_4) = m_g(\lambda_4) = 1$. Qual é a forma canônica de Jordan da matriz A?

GABARITO

1 a) $t = \pm\sqrt(2), V(\sqrt(2)) = [(1, \sqrt(2) - 1)]$ e $V(-\sqrt(2)) = [(1, -1 - \sqrt(2))]$

b) $t = -1$

c) $t = -1, t = -2, t = 2, V(-1) = [(1, -2, \frac{-1}{2})], V(-2) = [(1, -1, 1)]$ e $V(2) = [(1, 1, 1)]$.

d) $t = 0, t = 6, V(0) = [(-\frac{5}{2}, 1, 2)]$ e $V(6) = [(1, 1, 1)]$

e) $t=\pm 1, V(1)=[t^2, t+1]$ e $V(-1)=[t-1]$

f) $t=\pm 1, V(1)=[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ e

$V(-1)=[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}]$

3) $t=1, t=2, V(1)=[(-1,1)]$ e $V(2)=[(1,0)]$

4) $t=2, t=3, t=-1, V(2)=[(1,0,0)], V(3)=[(5,1,1)]$ e $V(-1)=[(1,3,-3)]$

5) a) $t=-2$ e $V(-2)=[(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})]$

b) $t=2, t=3, V(2)=[(-1,1,0);(0,0,1)]$ e $V(3)=[(-2,1,0)]$

c) $t=1, t=2, V(1)=[(1,0,0)]$ e $V(2)=[(3,1,0)]$

d) $t=2$ e $V(2)=[(0,0,1)]$

7) $T(x,y)=(-12x-30y, 5x+11y)$

8) a) $t=\pm 2$ b) $t=5, t=4$ e $t=2$ c) $t=2$ e $t=3$

9) São diagonalizáveis os itens a, d, e, f

10) a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$