UESB-Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Um breve estudo de séries para o curso de Cálculo

Versão 2.0

Laura Cristina Rodrigues Goulart

2017

Sumário

Capítulo 1

Seqüências Numéricas

1.1 Introdução

Neste capítulo, introduziremos o conceito do que é uma seqüência e faremos uma analogia entre o limite de uma função e a convergência de uma seqüência . Além disso, muitos dos resultados obtidos para limite serão restringidos a seqüências , como por exemplo a regra de L'Hospital. Contudo, por se tratar de um caso particular de funções , para as seqüências acrescentaremos teoremas peculiares garantindo a sua convergência.

Definição 1.1. *Uma seqüência numérica real é uma função* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Notação : (a_n)

O número n é chamado de índice da seqüência e a_n o n-ésimo termo ou termo geral.

Exemplo 1. *A seqüência dos números pares:* $0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots$

Exemplo 2. *A seqüência dos números ímpares:* $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$.

Exemplo 3. *A seqüência dos números primos:* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$.

Exemplo 4. $a_n = n$

Exemplo 5. $a_n = \dfrac{1}{n}$

A primeira observação obtida dos exemplos acima é que nem sempre uma seqüência é determinada por uma lei de formação (ver o exemplo 3).

Além disso, no exemplo 5 podemos observar que a partir de um certo momento, os elementos da seqüência se aproximam rapidamente do zero. Isto motiva a definição de seqüência convergente.

A idéia intuitiva de uma seqüência convergente é que a partir de um certo índice n_0, os termos a_n estão bem próximos de uma determinada constante L e esta proximidade é medida pelo valor absoluto.

Definição 1.2. *Seja (a_n) uma seqüência numérica. Dizemos que (a_n) converge para um número real L quando dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$.*

Notação : $a_n \to L$ ou $\lim a_n = L$.

É importante observar que dado $\epsilon > 0$, o índice n_0 será determinado a partir dele, ou seja, o índice será interpretado como uma função de ϵ.

Exemplo 6. *Vamos provar que* $\dfrac{n}{n+1} \to 1$.

Dado $\epsilon > 0$ *queremos que* $|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow |\dfrac{n}{n+1} - 1| = \dfrac{1}{n+1} < \epsilon \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\epsilon} - 1$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, *existe* $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon} - 1$ *tal que* $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 1| < \epsilon$.

Para compreendermos que realmente n_0 está fixado pelo ϵ, vamos tomar valores para este último e observar como ficará o índice. Por exemplo, tome $\epsilon = \dfrac{1}{10}$ e teremos que $n_0 = 9$, enquanto que para $\epsilon = \dfrac{1}{100}$ teremos que $n_0 = 99$.

Propriedades:

Sejam $(a_n), (b_n)$ seqüências numéricas tais que $a_n \to L_1$ e $b_n \to L_2$. Então:

(1) $a_n + b_n \to L_1 + L_2$

(2) $ca_n \to cL_1$, onde c é uma constante real qualquer.

(3) $a_n \cdot b_n \to L_1 \cdot L_2$

(4) Se $L_2 \neq 0$ teremos que $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{L_1}{L_2}$

(5) $|a_n| \to |L_1|$

(6)Se f uma função contínua real, então $f(a_n) \to f(L_1)$

DEM:

(1) Como $a_n \to L_1$ e $b_n \to L_2$ temos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que:

$\forall n \geq n_1, n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - L_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ e $|b_n - L_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Tome $n_0 = max\{n_1, n_2\}$ e claramente obtemos:

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |(a_n+b_n)-(L_1+L_2)| = |(a_n+L_1)+(b_n-L_2)| < |a_n-L_1|+|b_n-L_2| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $a_n + b_n \to L_1 + L_2$

(2) Deixamos a cargo do leitor.

(3)Como (b_n) é uma seqüência convergente temos que ela é limitada, e desta

maneira existe um número real $M > 0$ tal que $|b_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $a_n \to L_1$ e $b_n \to L_2$ temos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$n \geq n_1, n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - L_1| < \dfrac{\epsilon}{(M + |L_1|)}$ e $|b_n - L_2| < \dfrac{\epsilon}{(M + |L_1|)}$.

Tome $n_0 = max\{n_1, n_2\}$.

Daí,

$|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = |a_n \cdot b_n - b_n \cdot L_1 + b_n \cdot L_1 - L_1 \cdot L_2| =.$

$= |(a_n - L_1)b_n + (b_n - L_2)L_1| < |a_n - L_1||b_n| + |b_n - L_2||L_1| <$

$< \dfrac{\epsilon}{(M + |L_1|)}M + \dfrac{\epsilon}{(M + |L_1|)}|L_1| = \epsilon$

(4) Deixamos a cargo do leitor.

(5) Basta observar que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(6) Seja $\epsilon > 0$.

Como f é contínua segue para cada $a \in \mathbf{R}$, existe $\delta > 0$ tal que

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

Por outro lado, $a_n \to L_1$ temos que existe n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L_1| < \delta$

Juntando os dois fatos acima, concluimos que n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow$

$|a_n - L_1| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(L_1)| < \epsilon$ e é o que queríamos.

1.2 Seqüências limitadas e Monótonas

Definição 1.3. *Uma seqüência* (a_n) *é limitada quando existe um número real* $M > 0$ *tal que* $|a_n| \leq M$ *para todo n inteiro positivo.*

Em outras palavras, o conjunto dos termos da seqüência é um conjunto limitado.

Podemos também dizer que uma seqüência é limitada quando existem números reais A,B tais que $A \leq a_n \leq B$ para n inteiro positivo. Os números A,B são chamados de limite inferior e limite superior, respectivamente.

Um exemplo claro é a seqüência $a_n = \dfrac{1}{n}$ limitada tanto pelo zero quanto pelo 1.

Teorema 1.1. *Toda seqüência convergente é limitada.*

DEM:

Seja (a_n) uma seqüência tal que $a_n \to L$.

Assim, pela própria definição , dado $\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0 \Rightarrow$

$|a_n - L| < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < a_n < L + \epsilon.$

Tome $A = \{a_1, \ldots, a_{n_0}, L - \epsilon, L + \epsilon\}$ e considere $\alpha_1 = minA$, $\alpha_2 = maxA$.

Logo,

$$\alpha_1 \leq a_n \leq \alpha_2.$$

Portanto, a seqüência é limitada.

Uma das aplicações deste lema é o fato de que seqüência ilimitadas não serão convergentes; como é fácil verificar no exemplo 1.4.

A recíproca do teorema 1.1 não é verdadeira e para verificar isto, basta tomar a seqüência alternada (0,1,0,1,0,1,0,1,...) no qual é divergente e limitada. Porém, existe um resultado semelhante garantindo que um determinado tipo de seqüência converge e para isto definiremos o que será uma seqüência monótona.

Definição 1.4. *Uma seqüência* (a_n) *é dita crescente quando* $a_n \leq a_{n+1}$ *e ela é dita decrescente quando* $a_n \geq a_{n+1}$*. Uma seqüência é dita monótona quando ela for crescente ou decrescente.*

Os exemplos 4 e 5 são seqüências monótonas.

É importante notar que numa seqüência crescente, o primeiro termo é um dos seus limites inferiores, enquanto que numa seqüência decrescente, ele será um limite superior.

Teorema 1.2. *Toda seqüência monótona e limitada é convergente.*

DEM:

Seja (a_n) uma seqüência crescente e limitada.

Assim, a seqüência (a_n) possue um supremo S, e consequentemente

teremos que:

(i) $a_n \leq S$ para todo n.

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$ tal que $S - \epsilon \leq a_{n_0}$

Como a seqüência é crescente temos que $n \leq n_0 \Rightarrow$

$S - \epsilon \leq a_n \leq S < S + \epsilon \Leftrightarrow |a_n - S| < \epsilon.$

Portanto, $a_n \to S$.

Observação 1. *Uma seqüência convergente pode não ser monótona.*
$(a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n})$.

Observação 2. *Uma seqüência monótona pode ser divergente.* $(a_n = n!)$.

Observação 3. *Uma seqüência limitada pode ser divergente.*$(a_n = (-1)^n)$

1.3 Subseqüências

Ao eliminarmos alguns termos de uma seqüência , de maneira ordenada, obtemos uma nova seqüência chamada de subseqüência .

Definição 1.5. *Dado um subconjunto S de $\boldsymbol{N}$ definimos como subseqüência de uma seqüência como sendo a seqüência restrita a esse conjunto S.*

Consideremos os exemplos 1 e 2 para entendermos melhor essa definição, pois essas duas seqüências nada mais são que subseqüências do exemplo 4.

Notação : (a_{n_k})

Teorema 1.3. *Se $a_n \to L$ então $a_{n_k} \to L$.*

DEM:

Como $a_n \to L$ temos que $\forall \epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$.

Observemos que $n_k \geq k$ e portanto, $k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - L| < \epsilon$.

Observação 4. *Uma importante conseqüência deste lema é que o limite de uma seqüência é único. Além disso, quando uma seqüência admite duas subseqüências convergindo para pontos distintos teremos que essa seqüência é divergente. Porém, se as subseqüências de índices pares e ímpares convergem para o mesmo valor, teremos, claramente, a convergência da seqüência para este valor.*

Exemplo 7. $a_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n} & , \quad se\ n\ par \\ \dfrac{n-1}{n} & , \quad se\ n\ ímpar \end{cases}$

1.4 Resultados Importantes

Teorema 1.4. *Sejam (a_n) e (b_n) seqüências tais que $a_n \to 0$ e (b_n) é limitada. Então $a_nb_n \to 0$.*

Por exemplo, a seqüência $a_n = \dfrac{cos(n^3+5)}{n}$ converge para zero, pois $cos(n^3+5)$ é limitada e $\dfrac{1}{n} \to 0$.

Como uma seqüência é um tipo especial de função, é natural questionar a sua diferenciabilidade. Além disso, prova-se que existe uma função f tal que $f(n) = a_n$ e segue imediatamente que
$lim_{x\to\infty} f(x) = L \Rightarrow a_n \to L$.

Teorema 1.5 (Regra de L'Hospital para Seqüências). *Sejam (a_n) e (b_n) seqüências com funções f, g derivavéis tais que $f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$, $a_n \to \infty$ ou 0, $b_n \to \infty$ ou 0. Se*
$lim_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, *então* $\dfrac{a_n}{b_n} \to L$.

Esse último lema é uma versão da regra de L'Hospital para seqüências e iremos aplicá-lo para estudar o comportamento da seqüência $a_n = \dfrac{n}{lnn}$

Logo, $\lim \dfrac{n}{lnn} = \lim \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = \lim n = \infty$.

Teorema 1.6 (Teorema do Confronto para Seqüências). *Sejam $(a_n), (b_n), (c_n)$ seqüências tais que $a_n \leq c_n \leq b_n$. Se $a_n, b_n \to L$, então $c_n \to L$.*

O próximo lema pode ser interpretado como: A média aritmética de uma seqüência converge para o mesmo limite da seqüência analisada.

Teorema 1.7. *Se a seqüência (a_n) converge para L, então* $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to L$.

DEM:

Como $\lim a_n = L$ temos, pela definição , que para qualquer $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Logo,

$$|\frac{a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n}| < \frac{\frac{\epsilon}{2} + \ldots + \frac{\epsilon}{2}}{n} = \frac{n - n_0}{n}\frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$$

.

Por outro lado, $a_1, \ldots, a_{n_0}$ é uma quantidade finita de números reais e segue imediatamente que $\lim \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n} = 0$.

Assim, existe n_1 tal que $n \geq n_1 \Rightarrow |\dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n}| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

Tomemos $n_2 = max\{n_0, n_1\}$ e segue que $|\dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}| = |\dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n} +$

$+\dfrac{a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n}| < |\dfrac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{n}| + |\dfrac{a_{n_0+1} + \ldots + a_n}{n}| < \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Portanto, $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \to L$.

Exercícios Resolvidos

(1º) Estude o comportamento da seqüência $a_n = r^n$ para qualquer número real r, no qual $|r| \neq 1$.

Solução

(1º caso) $0 \leq |r| < 1$.

Observemos que a seqüência $b_n = |r^n| = |r|^n$ é decrescente e limitada inferiormente por 0 , e consequentemente $|r^n| \to 0 \Rightarrow r^n \to 0$.

(2º caso) $|r| > 1$.

Neste caso a seqüência b_n considerada acima é claramente ilimitada, ou seja, ela é divergente.

Logo, r^n também é divergente.

(2º) Prove que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Solução
Observemos que $\lim a_n = \lim n^{\frac{1}{n}} = \infty^0$ que se trata de uma indeterminação .
Então vamos procurar uma função contínua e aplicar a propriedade 6, com o objetivo de "abaixar"o expoente $\frac{1}{n}$. Sendo assim, o leitor perceberá que a função que se encaixa melhor é a logarítmica natural.
Seja $f(x) = ln(x)$ e segue que $\lim ln(a_n) = ln(\lim a_n)$.
Logo,

$$\lim ln n^{\frac{1}{n}} = \lim \frac{ln n}{n} = \lim \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0.$$

Contudo, a função logarítmica natural é bijetora, ou seja, $\lim ln(a_n) = 0 = ln(\lim a_n) \Leftrightarrow \lim a_n = 1$.

(3º) Estude o comportamento das seqüências abaixo:

(a) $a_n = (-1, 1/2, 3, 1/4, -5, 1/6, ...)$

(b) $a_n = \dfrac{3n^3 + 1}{2n^3 + 2}$

Solução :
(a) A seqüência admite uma subseqüência convergindo para zero, porém existe uma outra subseqüência divergente.
Portanto, (a_n) é divergente.

(b) $\lim \dfrac{3n^3+1}{2n^3+1} = \lim \dfrac{n^3(3+1/n^3)}{n^3(2+1/n^3)} = \dfrac{\lim(3+1/n^3)}{\lim(2+1/n^3)} = \dfrac{\lim 3 + \lim 1/n^3}{\lim 2 + \lim 1/n^3} =$

$= \dfrac{3+0}{2+0} = \dfrac{3}{2}$.

(4º) Mostre que $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}} = 3$

Solução :
A idéia aqui é contruir uma seqüência para depois verificar a sua convergência.
Tomemos $a_0 = \sqrt{6}$ e $a_n = \sqrt{6 + a_{n-1}}$.
Vamos supor que $a_n \to L$, e logo, $a_{n-1} \to L$ por se tratar de uma subseqüência .
Assim,

$$L = \lim a_n = \lim \sqrt{6 + a_{n-}} = \sqrt{\lim(6 + a_{n-1})} = \sqrt{6 + L} \Rightarrow L^2 = 6 + L \Rightarrow L = 3 \text{ ou } L = -2.$$

Como a_n é uma seqüência de termos positivos teremos que $L = 3$.

Exercícios Propostos

1. Estude a convergência das seqüências abaixo:

   (a) $a_n = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \cdots)$

   (b) $a_n = \sqrt[n]{3}$

   (c) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

   (d) $a_n = \dfrac{1}{n^n}$

   (e) $a_n = \dfrac{e^n}{n}$

   (f) $a_n = \dfrac{2^n}{5^n}$

   (g) $a_n = 2^{-n} cosn$

   (h) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

   (i) $a_n = \dfrac{n}{n + senn}$

   (j) $a_n = (1 + \dfrac{3}{n})^n$

   (k) $a_n = \sqrt[n]{1 + 2n}$

   (l) $a_n = \dfrac{(2n-1)!}{(2n)!}$

   (m) $a_n = (1 - \dfrac{2}{n})^n$

   (n) $a_n = cos(n\pi)$

   (o) $a_n = \int_1^n \dfrac{1}{x} dx$

2. Calcule $\lim_{n\to\infty} s_n$, onde $s_n = \sum_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1})$.

3. Considere a seqüência (a_n) tal que $a_n \to L$. Mostre que:

   (a) $c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdot a_n} \to L$

   (b) Suponha que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ e então $\sqrt[n]{a_n} \to L$

4. Prove que $\lim (1 + 1/n)^n = e$.

5. Coloque V(verdadeiro) ou F(falso), justificando-se:

   (a) ( ) toda seqüência convergente é limitada.

   (b) ( ) toda seqüência limitada é convergente.

   (c) ( ) toda seqüência limitada é monótona.

(d) ( ) toda seqüência monótona é convergente.

(e) ( ) toda seqüência divergente é não monótona.

(f) ( ) se uma seqüência possui uma subseqüência convergente, ela própria converge.

(g) ( ) o limite de uma seqüência é único.

(h) ( ) toda seqüência decrescente e limitada converge para zero.

(i) ( ) se $a_n \leq b_n$ tal que (a_n) é crescente e (b_n) converge, então (a_n) também converge.

6. Considere $a \in \mathbb{R}$ um inteiro positivo. Mostre que a sequência $x_n = \dfrac{1}{2}\left(x_{n-1} + \dfrac{a}{x_{n-1}}\right)$ converge para $\sqrt{a}$.

Capítulo 2

Séries Numéricas

2.1 Introdução

Neste capítulo, consideraremos uma seqüência e a partir daí, somando os seus termos, construiremos uma outra, no qual o limite receberá o nome de série numérica. Abordaremos também mais alguns critérios de convergência, mas agora vistos para séries. Por isso, é importante tomar um certo cuidado e não usar esses critérios para seqüências.

Definição 2.1. *Dado uma seqüência numérica* (a_n)*, formaremos uma nova seqüência dita soma parcial da seguinte forma:*

$$\begin{array}{lcc} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & & \\ S_n & = & a_1 + ... + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \end{array}$$

Observemos que $\lim S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n\geq 1} a_n$ e esta última chama-se *série numérica.* Aqui temos dois conceitos distintos, mas capazes de confundir o leitor e para entendermos melhor essa distinção e sutileza, veremos o seguinte exemplo:

Exemplo 8. *Vamos calcular a soma parcial da série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ *e assim,*

$S_1 = \dfrac{1}{2}$

$S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

$\vdots$

$S_n = \frac{n}{n+1}$

Uma outra maneira de encontrar essa soma parcial é usando frações parciais. (tente!)

Definição 2.2. *Quando a seqüência da soma parcial convergir para S, diremos que a série converge, e denotaremos por* $\sum_{n\geq 1} a_n = S$

Dessa forma, teremos que a série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Nem sempre será possível analizar a convergência das somas parcais, por isso, nas próximas seções enunciaremos alguns dos critérios mais importantes de convergência. Um outro contratempo será que os critérios apresentados apenas nos dizem se a série conerge ou diverge, não determinam o valor exato do limite.

Exemplo 9 (Série Geométrica)**.** *Seja* $\sum_{n\geq 0} q^n$ *e teremos que a soma parcial é dada por* $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$*, pois a série se trata da soma infinita de uma p.g. de razão q.*

Supondo que $\|q\| < 1$ *segue que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$ *e assim,* $\sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$*; por outro lado, notemos que para* $\|q\| \geq 1$ *a série diverge.*

2.2 Teste da divergência(TD)

Teorema 2.1. *Se a série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *converge, então* $a_n \to 0$.

DEM:

Observe que $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Logo, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

A partir desse resultado, analisaremos, primeiramente, a convergência da seqüência do termo geral e no caso em que o limite é não nulo, concluiremos que a série diverge. Este teste é dito **Teste da Divergência**. Entretanto, o fato do limite ser nulo não garantirá a convergência da série como veremos adiante.

Exemplo 10. *Seja a série* $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{3n+4}$ *e segue imediatamente que* $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+4} = 1/3$. *Pelo T.D. temos que a série diverge.*

Exemplo 11. *Já para essa outra série* $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{lnn}$ *teremos que* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{lnn} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = +\infty$. *Pelo T.D., temos que a série acima diverge.*

2.3 Séries de Termos Positivos

Dizemos que uma série $\sum_{n\geq 1} a_n$ é de termos positivos qdo $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 1$.

2.3.1 Teste da Comparação (TC)

O teorema abaixo descreve o Teste da Comparação ; um teste de pouca praticidade, mas largamente usado em algumas das demonstrações dos outros testes.

Teorema 2.2 (Teste da Comparação). *Sejam as séries* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *e* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *séries de termos positivos tais que* $a_n \leq b_n, \forall n$. *Então:*

(i) Se $\sum_{n\geq 1} b_n$ *converge, então* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *converge.*

(ii) Se $\sum_{n\geq 1} a_n$ *diverge, então* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *diverge.*

DEM:

(i) Vamos primeiro supor que $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge e considere S_n, T_n as somas parcias das séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ e $\sum_{n\geq 1} b_n$, respectivamente.

Assim, existe um número real T tal que $\lim T_n = T$.

Como $a_n \leq b_n$ segue imediamente $S_n \leq T_n < T$, pois T é um limite superior para a seqüência (T_n).

Além disso, observemos que $S_1 = a_1 \leq a_1 + a_2 = S_2$,...,$S_n \leq S_n + 1$, ou seja, S_n é limitada e crescente.

Portanto, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

(ii) Basta supor que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ é convergente e aplicar o item anterior.

Exemplo 12 (Série Harmônica)**.** *Seja a série* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Notemos que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2},$$

sendo que esta última série claramente diverge.

Portanto, pelo T.C. concluimos que $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Observemos que o limite do termo geral da série harmônica é nulo e isto esclarece o comentário feito anteriormente na pág. 19.

2.3.2 Teste da Comparação por Limites(TCL)

Além do T.C., teremos também um outro teste chamado de Teste da Comparação por Limite, o mais indicado para séries nos quais não poderemos facilmente comparar.

Teorema 2.3 (Teste da Comparação por Limite)**.** *Sejam as séries* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *e* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *séries de termos positivo.*

(i) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = k > 0$*, então ambas as séries tem o mesmo comportamento.*

(ii) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ *e* $\sum b_n$ *converge, então a série* $\sum a_n$ *converge.*

(iii) Se $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ *e* $\sum b_n$ *diverge, então a série* $\sum a_n$ *diverge.*

DEM:

(i) Como $\lim \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ e dado $\epsilon = k/2$ temos que existe n_0 tal que

$n \geq n_0 \Rightarrow \dfrac{k}{2} < \dfrac{a_n}{b_n} < \dfrac{3k}{2} \Rightarrow \dfrac{k}{2}b_n < a_n < \dfrac{3k}{2}b_n.$

Agora, vamos analisar todos os possíveis casos:

(1) Se $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge e como $a_n < \dfrac{3k}{2}b_n$ segue que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge

(2) Se $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge e como $a_n < \dfrac{3k}{2}b_n$ segue que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ diverge.

(3) Se $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ diverge e como $\dfrac{k}{2}b_n < a_n$ segue que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge.

(4) Se $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge e como $\dfrac{k}{2}b_n < a_n$ segue que $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.

Os itens (ii) e (iii) prova-se de maneira análoga ao anterior e por isso deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 13. *Seja a série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+5}$.

Para usar o T.C.L. precisamos encontrar uma série no qual já conhecemos a sua convergência e uma candidata será a série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n+5}$ *divergente.*

Logo, $\lim \dfrac{\dfrac{\sqrt{2n+3}}{n+5}}{\dfrac{1}{n+5}} = \lim \sqrt{2n+3} = \infty$, *ou seja, a série inicial diverge.*

Observação 5. *Para usarmos o TCL, podemos seguir as seguintes etapas:*

1. Eliminar o denominador ou numerador.

2. Comparar com as séries mais importantes - série harmônica, geométrica ou as p-séries.

2.3.3 Teste da Integral(TI)

Para o estudo da p-série introduziremos mais um critério de convergência.

Teorema 2.4 (Teste da Integral). *Seja* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *uma série de termos positivos. Se existe uma função* f *contínua, positiva e decrescente para* $x \geq 1$ *tal que* $f(n) = a_n$*, então a série tem o mesmo comportamento que* $\int_1^\infty f(x)dx$.

DEM:

Considere S_n a soma parcial da série $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Uma das propriedades de integral é que para funções decrescente e positiva teremos $a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x)dx \leq a_i$

Logo,

$$a_2 + ... + a_{n+1} \leq \int_1^2 f(x)dx + ... + \int_n^{n+1} f(x)dx =$$

$$= \int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + ... + a_n \Longleftrightarrow S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} \leq S_n \quad (I)$$

Se $\int_1^\infty f(x)dx$ converge ou diverge, por (I) temos que a série também terá o mesmo comportamento.

Exemplo 14 (As p-séries). *Seja a série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$, *com* $p \neq 1$ *um número inteiro positivo .*

Vamos aplicar o T.I. para essa série.

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^p}$ *que é claramente positiva, contínua e decrescente para* $x \geq 1$.

Assim,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} |_1^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-p} - 1}{1-p}$$

($1^{\underline{a}}$*possibilidade*)$p > 1$ *Neste caso,* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{-p+1} - 1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$

($2^{\underline{a}}$*possibilidade*)$p < 1$ *e segue imediatamente que a série diverge.*

2.4 Séries Absolutamente Convergente

Os testes estudados até esse momento são específicos, isto é, eles servem para analizar alguns tipos de séries. Por essa razão, necessitaremos de testes mais práticos incluindo as séries de termos negativos e alternados. Porém, antes de enuncia-los, teremos a definição de convergência absoluta.

Definição 2.3. *Uma série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *é dita absolutamente convergente quando a série* $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ *convergir.*

Exemplo 15. *A série* $\sum_{n\geq 1} \frac{cosn}{n^2}$ *converge absolutamente, pois* $\sum_{n\geq 1} \frac{|cosn|}{n^2} \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

O próximo resultado não será demonstrado pelo fato de ser preciso o conceito de seqüência de Cauchy, no qual não foi dado neste curso. Contudo, no livro do Elon há uma elegante prova.

Lema 2.1. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Uma conseqüência imediata é que séries convergentes não necessitam serem absolutamente convergentes, como por exemplo a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ no qual veremos sua convergência pelo teste de Leibniz.

2.4.1 Teste da Raiz(TRI)

Teorema 2.5 (Teste da raiz)**.** *Sejam a série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *e* $A = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$. *Então:*

(i) $0 \leq A < 1 \Rightarrow$ *a série converge absolutamente;*

(ii) $A > 1 \Rightarrow$ *a série diverge*

(iii) Para o caso $A = 1$ *nada podemos afirmar.*

DEM:

Primeiro provaremos o item (iii) e para isto tomemos as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Para ambas teremos que $A = 1$, mas uma diverge enquanto que a outra converge.

Suponhamos que $0 \leq A < 1$ e assim, existe $r \in \mathbf{R}$ tal que $0 \leq A < 1$.

Como $A = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ temos que existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq A < r < 1 \Rightarrow |a_n| < r^n$.

Como $0 < r < 1$ temos que a série $\sum_{n\geq 1} r^n$ converge e pelo T.C. segue imediatamente que a $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge absolutamente.

Para o caso $A > 1$ deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 16. *Estudaremos a convergência das séries abaixo, usando o TRI:*

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$.

Logo,

$$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

E portanto, a série converge.

(b) $\sum_{n\geq 1} (1 + \frac{1}{n})^n$

Assim,

$$\lim \sqrt[n]{(1 + \frac{1}{n})^n} = \lim 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Para este caso, nada poderemos afirmar. Já pelo T.D. garantimos que a série diverge.

(c) $\sum_{n\geq 1} (\sqrt[n]{n} + 1)^n$

Logo,

$$\lim \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} + 1)^n} = \lim \sqrt[n]{n} + 1 = 2$$

Assim, a série é divergente.

2.4.2 Teste da Razão(TRZ)

A demonstração do teste seguinte obedece o mesmo princípio do teste da raiz, onde se busca uma série marjorante. Por isso, omitiremos alguns detalhes para não entediar o leitor.

Teorema 2.6. ***(Teste da razão)*** *Sejam a série* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *e* $L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

Então

(i) $0 \leq L < 1 \Rightarrow$ *a série converge absolutamente;*

(ii) $L > 1 \Rightarrow$ *a série diverge;*

(iii) Para o caso L=1 nada podemos afirmar.

DEM:

Para provar o item (iii) basta tomar, novamente, as séries harmônica e uma p-série convergente.

Suponhamos que $0 \leq L < 1$ e assim, temos garantido a existência de um $r \in \mathbf{R}$ tal que $0 \leq L < r < 1$.

Logo, existe $n_o \in \mathbf{N}$ tal que $n \geq n_o \Rightarrow \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq L < r < 1 \Rightarrow$ $|a_{n+p}| < r^p|a_{n_o}|$.

Como $0 < r < 1$ temos que a série $\sum\limits_{n \geq n_o} r^p|a_{n_o}|$ e pelo T.C. segue imediatamente que a série inicial converge absolutamente.

Para o caso $L > 1$ deixamos a cargo do leitor.

Exemplo 17. *Vamos estudar o comportamento das séries a seguir:*

(a) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{2^n}{n!}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

Pelo TRZ temos que a série converge.

(b) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{e^n}{n^2}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\dfrac{e^{n+1}}{(n+1)^2}}{\dfrac{e^n}{n^2}} = \lim e(\frac{n}{n+1})^2 = e > 1$$

Pelo TRZ temos que a série diverge.

(c) $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{ln(n)}$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\dfrac{1}{ln(n+1)}}{\dfrac{1}{ln(n)}} = \lim \frac{ln(n)}{ln(n+1)} = 1$$

Pelo TRZ, nada podemos concluir, porém usando tanto a série harmônica e o TCL teremos que essa série diverge.

(d) $\sum\limits_{n \geq 1} ln(n)$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{ln(n+1)}{ln(n)} = 1$$

Pelo TRZ, nada podemos concluir, todavia pelo TD temos garantido que essa série diverge.

Observação 6. *Lembremos que* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to L$ *então* $\sqrt[n]{|a_n|} \to L$ *(ver exercícios propostos do capítulo anterior), que traduzido quer dizer que o teste da razão implica no teste da raiz. Ou seja, se o TRZ der um exato valor, o TRI dará o mesmo valor.*

Observação 7. *Podemos usar o TRZ para determinar a convergência de uma sequência. Por exemplo, a sequência* $a_n = \frac{2^n}{n!} \to 0$ *já que a série* $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$ *converge pelo TRZ.*

2.5 Séries Alternadas

Para encerrarmos este capítulo, incluiremos um teste para séries alternadas.

Teorema 2.7. ***(Teste de Leibniz(TL))*** *Seja* (a_n) *uma seqüência decrescente de termos positivos convergindo para zero, então a série* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ *converge.*

DEM:

Consideremos as somas parcias S_n desta série.

Nosso objetivo será dividir S_n em duas partes: índices pares e ímpares.

Primeiro, observemos que pelo fato da seqüência a_n ser decrescente teremos que S_{2n} é crescente tal que $0 < S_{2n} < a_1$ e segue que $S_{2n} \to S$.

Por outro lado, $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \Rightarrow S_{2n+1} \to S$

Portanto, a série é convergente.

Exemplo 18. *Pelo TL segue que a* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ *converge.*

Exercícios Propostos

1. Encontre a soma das séries abaixo:

   (a) $\sum_{n\geq 0}(\frac{3}{5})^n$

(b) $\sum\limits_{n\geq 0} 2^{2-n}$

(c) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-2)^n \cdot 4}{3^{n+1}}$

(d) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{n+2}}{5^n}$

(e) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{3^n}$

2. Encontre a soma parcial das séries abaixo:

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} ln(\frac{n}{n+1})$

(b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3}{9n^2+3n-2}$

(d) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2}{(4n-3)(4n+1)}$

(e) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$

3. Usando o TD, mostre que as séries abaixo divergem:

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3n^2+5}{5n^2+1}$

(b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(c) $\sum\limits_{n\geq 1} cos(\frac{n\pi}{3})$

(d) $\sum\limits_{n\geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

4. Use o TCL para analisar o comportamento das séries abaixo:

(a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2+5^n}$

(b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n+4}$

5. A série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} sen(\frac{1}{n})$ é divergente ou convergente. Justifique sua resposta.

6. Utilize o TI para estudar o comportamento das seguintes séries:

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}$

   (b) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{ln(n)}{n}$

7. Estude a convergência das séries abaixo:

   (a) $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{lnn}$

   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$

   (d) $\sum_{n\geq 1} (\frac{cos2}{3})^n$

   (e) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n}$

   (f) $\sum_{n\geq 1} \frac{cosn}{5^n}$

   (g) $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n^4+n^2+1}$

   (h) $\sum_{n\geq 1} \frac{2+cos(n)}{n^2}$

   (i) $\sum_{n\geq 1} \frac{ln(n)}{n^3}$

   (j) $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(lnn)^2}$

   (k) $\sum_{n\geq 1} \frac{3}{9n^2+3n-2}$

   (l) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2+7}$

(m) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+2}$

(n) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (2n)!}{3^n}$

(o) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+1}$

(p) $\sum_{n\geq 1} \frac{n3^{2n}}{5^{n-1}}$

(q) $\sum_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^{2n}$

(r) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{n}{e^n}$

(s) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

(t) $\sum_{n\geq 1} sen(\frac{1}{nln(n)})$

(u) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+n+1}}$

8. Calcule $0,6+0,06+0,006+...$

9. Prove, usando a série conviniente que $\lim \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

10. Use o T.I. para provar que a série harmônica diverge.

Capítulo 3

Séries de Potências

Assim como é feito para sequências numéricas, podemos associar a cada número natural, uma função originando uma sequência de funções.

3.1 Introdução a seqüências de funções

Definição 3.1. *Dizemos que uma seqüência de funções* (f_n) *convergem pontualmente para* f *se dado* $\epsilon > 0$ *e para cada* x *em* $D_{f_n} = D_f$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Notação : $f_n(x) \to f(x)$

Observemos, entretanto, que o n_0 é determinado tanto pelo ponto x quanto pelo valor ϵ. Um exemplo simples é a seqüência $f_n(x) = x^n$, definida em $[0,1]$. É claro que $f_n(x) \to 0$, se $x \neq 1$ e$f_n(x) \to 1$, se $x = 1$

Assim, para cada $x \in [0,1]$ teremos uma seqüência numérica diferente, isto é, para cada x fixado, encontramos um n_0.

Além disso, apesar de cada função f_n serem contínuas, a sua função soma é descontínua. Por essa razão, a convergência pontual não é tão "boa".

Por outro lado, tomemos a seqüência $f_n(x) = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{n}}$ definida em $(-1,1)$.

Portanto, $f_n(x) \to 0$ independentemente de x.

Este fato induz a uma outra definição de convergência de seqüência de funções .

Definição 3.2. *Dizemos que uma seqüência de funções* (f_n) *convergem uniformemente para* f *se dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in D_{f_n}$.

Notação : $f_n(x) \to f(x)$ unif.

A convergência uniforme é a mais adequada pois preserva as propriedades dos termos de uma sequêncoa numérica como veremos a seguir.

3.1.1 Propriedades da Convergência Uniforme

Seja (f_n) é uma seqüência de funções contínuas convergindo uniformemente para f.

Então:

(1) f é contínua.

(2) $\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \lim f_n(x) = \lim \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x)$

3.2 Introdução a série de funções

A partir dessa seção, estaremos usando sempre a convergência uniforme, exceto quando mencionado o contrário.

Definição 3.3. *Seja (f_n) uma seqüência de funções definidas em $A \subset \mathbb{R}$. A série $\sum_{n\geq 1} f_n$ é dita a série de funções .*

Para cada $x \in A$ fixado, a série de funções torna-se uma série numérica e, por isso é tão importante um estudo anterior e aprofundado de séries numéricas. Além disso, a função limite f da série tem o mesmo domínio da seqüência (f_n).

Exemplo 19. *Seja a série $\sum_{n\geq 0} x^n$.*

Observemos que para $x = 1/2$ teremos a série geométrica convergente $\sum_{n\geq 0}(1/2)^n$, enquanto que para $x = 3$ teremos uma série divergente.

É natural questionarmos para que pontos pontos de A garantimos a convergência da série. Para resolver esta questão, definimos uma região do domínio no qual a série converge para uma função real f, e esta região é conhecida como DOMÍNIO DE CONVERGÊNCIA.

Teorema 3.1 (Critério de Weierstrass)**.** *Seja $\sum_{n\geq 1} f_n$ uma série de funções e considere a série numérica $\sum_{n\geq 1} M_n$ tal que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo x em A e $n \geq 0$. Se a série $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge, então a série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge.*

DEM:

A convergência da série numérica garante que, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)| = |\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} M_j < \epsilon$ e isto independe de $x \in A$.

Pelo TC teremos a convergência da série $\sum_{n\geq 1} f_n$.

Observação 8. *Se* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *é uma série convergente de funções contínuas(ou derivavéis ou integravéis) teremos que o seu limite é contímua(ou derivavél ou integravél).*

3.3 Séries de Potências

A série de funções mais importante é a série de potência definida abaixo:

Definição 3.4. *A série* $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ *é dita série de potência de centro* a*, onde* (a_n) *é uma seqüência numérica.*

O nosso principal objetivo será determinar o domínio de convergência de uma série de potência.

Lema 3.1. *Se* $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ *converge para* $x = b$*, então a série converge para todo* x *em* A *tal que* $|x-a| < |b-a| = r$

DEM:
Como $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ converge temos que $\lim a_n(x-a)^n = 0$.
Assim, fixando $\epsilon = 1$ temos que existe n_0 tal que

$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n(x-a)^n| < 1 \quad (1).$$

Por outro lado, para todo x em A tal que $|x-a| < r$ teremos $|a_n(b-a)^n| = |a_n(x-a)^n| \cdot |(\frac{(\mathrm{b-a})}{(\mathrm{x-a})})^n| \qquad (2).$

Tomemos $q = \frac{(\mathrm{b-a})}{(\mathrm{x-a})}$.

Por (1) e (2) concluímos que $|a_n(x-a)^n| < q^n < 1$.

Pelo CW teremos que a série $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ converge para todo $x \in (a-r, a+r)$.

Corolário 3.1. *Se* $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ *diverge para* $x = b$*, então a série diverge para todo* x *em* A *tal que* $|x-a| > |b-a| = r$

3.3.1 Raio de Convergência

Os próximos teoremas caracterizarão o nosso domínio de convergência.

Teorema 3.2. *Consideremos a série de potências $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$. Então existem somente três possibilidades:*

(i) A série converge apenas em $x = a$;

(ii) A série converge para todo $\mathbb{R}$;

(iii) Existe $r > 0$ tal que a série converge absolutamente para todo $x \in (a-r, a+r)$.

A demonstração é feita aplicando-se o lema anterior

O número r é chamado de raio de convergência da série.

Para a primeira possibilidade do Teorema 3.2 teremos, na realidade, que o raio de convergência é nulo; enquanto que para a segunda, o raio é infinito.

O teorema a seguir, nos indica como encontrar o raio de convergência por meio do teste da razão de séries numéricas.

Teorema 3.3. *Seja a série de potência $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$. Então o raio de convergência r da série é dado por $r = \lim \frac{|\mathrm{a_n}|}{|\mathrm{a_{n+1}}|}$.*

DEM:

Apliquemos o TRZ para séries quaisquer e segue que $\lim |\frac{\mathrm{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}}{\mathrm{a_n(x-a)^n}}| = |x-a| \cdot \lim \frac{|\mathrm{a_{n+1}}|}{|\mathrm{a_n}|}$.

Tomemos $L = \lim \frac{|\mathrm{a_{n+1}}|}{|\mathrm{a_n}|}$.

Assim, teremos somente três possibilidades:

(1) $L = 0$ e a série converge para todo x em $\mathbb{R}$, isto é, $r = \infty$.

(2) $L \geq 1$ e a série diverge para todo $x \not= a$, isto é, $r = 0$.

(3) $0 < L < 1$ e a série converge para todo $x \in (a - 1/L, a + 1/L)$, isto é, $r = \lim \frac{|\mathrm{a_n}|}{|\mathrm{a_{n+1}}|}$.

Exemplo 20.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{2^n x^n}}{\mathrm{(2n)!}}$$

Cálculos

$$r = \lim \frac{|\mathrm{a_n}|}{|\mathrm{a_{n+1}}|} = \lim \frac{\frac{\mathrm{2^n}}{\mathrm{(2n)!}}}{\frac{\mathrm{2^{n+1}}}{\mathrm{(2[n+1])!}}} = \lim \frac{\mathrm{2^n(2n+2)!}}{\mathrm{2^{n+1}(2n)!}} = \lim \frac{\mathrm{(2n+2)(2n+1)}}{2} = \infty$$

Portanto, $I_c = \mathbb{R}$

Exemplo 21.

$$\sum n \geq 0 \frac{(-1)^n(x-1)^n}{(n+1)2^n}$$

Cálculos

$$r = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)2^n}}{\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}} = \lim \frac{(n+2)2^{n+1}}{(n+1)2^n} = 2 \cdot \lim \frac{n+2}{n+1} = 2$$

Portanto, $I_c = (-1, 3)$

Observação 9. *Até este momento não estudamos o comportamento da série nos extremos do intervalo de convergência, mas esta análise é tão importante para o resultado final.*

(1) Para $x = -1$ *temos a série* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}$ *divergente.*

(2) Para $x = 3$ *temos a série* $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ *convergente.*

Portanto, a resposta correta é $I_c = (-1, 3]$.

Exemplo 22.

$$\sum n \geq 0 \frac{(n+1)!(x-5)^n}{10^n}$$

Cálculos

$$r = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{10^n}}{\frac{(n+2)!}{10^{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)!10^{n+1}}{(n+2)!10^n} = \lim \frac{10}{(n+2)} = 0$$

Portanto, $I_c = \{5\}$ *e neste caso, diremos que a série é divergente.*

Exemplo 23. *É claro que o intervalo de convergência da série* $\sum_{n\geq 1} x^n$ *é* $(-1, 1)$*; além de que teremos que* $\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{1}{1-x}$ *para todo* x *tal que* $|x| < 1$.

A partir desta série, iremos construir diversas séries de potência.

3.4 Propriedades da Função Soma de uma Série de Potência

Consideremos $S_(x)$ a função soma da série $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^n$ no qual claramente tem como domínio de definição o intervalo de convergência da série.

Teorema 3.4. *$S(x)$ é contínua em $(a-r, a+r)$*

DEM: Seja $x_0 \in (a-r, a+r)$ e consideremos $S_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i$

(soma parcial); $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i(x-a)^i$ (resto).

É claro que $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$

Afirmação 1. $R_n(x) \to 0$.

Basta ver que $\lim S_n(x) = S(x) = \lim(S_n(x) + R_n(x))$

Afirmação 2. $S_n(x)$ é contínua.

De fato,

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x\to x_0} a_i(x-a)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i(x_0-a)^i = S_n(x_0)$$

Logo, usando a definição de limite segue que $\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}(\lim S_n(x)) = \lim(\lim_{x\to x_0} S_n(x)) = \lim S_n(x_0) = S(x_0)$

Como consequência deste teorema, temos os seguintes colorários:

Corolário 3.2. *$S'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n(x-a)^n$ para todo $x \in (a-r, a+r)$.*

Corolário 3.3. *Para todo $x \in (a-r, a+r)$ temos que $\int_a^x S(t)dt = \sum_{n\geq 0} \frac{\mathrm{a_n(x-a)^{n+1}}}{\mathrm{n+1}}$*

3.5 Série de Taylor

Um resultado importante do corolário é que a função soma de uma série de potência é finitamente derivavél e suas derivadas são contínuas, isto é, ela é de classe C^∞.

Assim,

$$S(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots \Rightarrow S(a) = a_0$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots \Rightarrow S'(a) = a_1$$

$$S''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \cdots \Rightarrow S''(a) = a_2$$

Por recorrência obtemos que $S^{(n)}(a) = n!a_n$.

Logo,

$$a_n = \frac{\mathrm{S^{(n)}(a)}}{\mathrm{n!}}$$

.

Dessa forma, dada uma função f de classe C^∞, desejamos encontrar uma série de potência para representá-la na vizinhança de um ponto de $\mathbb{R}$.

Definição 3.5. *Seja função f de classe C^∞, a série $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ é dita série de Taylor da função $f(x)$ no ponto a.*

Observação 10. *Independentemente de como encontrarmos a função soma de uma série de potência, teremos que a série nada mais é do que a série de Taylor desta função soma.*

3.5.1 Exercício Proposto

1. Determine o intervalo de convergência das séries abaixo:

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2} x^n$

   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{n4^n}(x+1)^n$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$

   (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^{3n}}(x+2)^n$

   (e) $\sum_{n\geq 1} n^3 x^n$

   (f) $\sum_{n\geq 1} n^n x^n$

   (g) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+n+1}{n^4+1}(x-1)^n$

   (h) $\sum_{n\geq 1} n^n (x-3)^n$

   (i) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$

   (j) $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} x^n$

   (k) $\sum_{n\geq 1} \frac{n(x-1)^{2n}}{3^{2n-1}}$

   (l) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$

   (m) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n \ln(n)}$

   (n) $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+5)^{n-1}}{n^2}$

   (o) $\sum_{n\geq 1} \frac{(1-x)^n}{(n+1)3^n}$

   (p) $\sum_{n\geq 1} n! x^n$

   (q) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n x^{2n}}{(2n)!}$

2. Determine a função soma das séries abaixo:
   (a) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n$
   (b) $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{4^n}$
   (c) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n}$
   (d) $\sum_{n\geq 0} x^{4n}$
   (e) $\sum_{n\geq 0} 4^n x^n$
3. Encontre a série de potência das funções abaixo:
   (a) $f(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$
   (b) $f(x) = ln(1-x)$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$
4. Considere $S(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ e determine:
   (a) O intervalo de convergência da série;
   (b) $S'(x)$;
   (c) $H(x) = \int_0^x S(t)dt$.
5. Mostre que $arctgx = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
6. Utilizando séries de potências convenientes, mostre que $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^{n-1}} = 4$.
7. Encontre a série de Taylor para as funções $e^x, senx$ em torno da origem.
8. Obtenha $\int_0^x e^{-t^2}dt$ em séries de potências.
9. Obtenha a série de potências de x para $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$.
10. Use a representação de funções em séries de potêncis para determinar $f^{(40)}$e$f^{(41)}$ de $f(x) = x^2 senx$.
11. Sabendo que $\sum_{n\geq 1} x^n = \frac{1}{1-x}$, obtenha uma série de potência de x para cada função abaixo:
    (a) $\frac{1}{(1-x)^3}$
    (b) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$
    (c) $\frac{1}{1-x^4}$
    (d) $\frac{1}{1-4x}$
    (e) $\frac{1}{2+x}$
12. Usando a representação $ln(1-t) = \sum_{n\geq 0}\frac{t^{n+1}}{n+1}$ para $|t| < 1$, calcule ln(1.2) com 3 casas decimais e compare o valor com o resultado obtido pela calculadora.

13. Desenvolva as funções $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ e $g(x) = \frac{1}{3-2x}$ em séries de potências de x, determine os respectivos intervalos de convergência e em seguida obtenha séries para representar $f'(x)$ e $\int_0^x g(t)dt$.

14. Encontre a Série de Taylor em torno da origem de cada função dada a seguir:

    (a) $f(x) = e^{-x^2}$

    (b) $f(x) = xsenx$

    (c) $f(x) = 3^{x+1}$

    (d) $f(x) = -ln(1 + x^2)$

    (e) $f(x) = \frac{\mathrm{senx}}{\mathrm{x}}$

15. Para cada função f dada abaixo, encontre sua expansão em série de Taylor em torno do ponto indicado:

    (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 9$;

    (b) $f(x) = tgx$, $a = 0$;

    (c) $f(x) = cosx$, $a = \pi/3$

"Os erros do passado não justificam o medo de ser feliz no presente."