

0.1 Equações da reta no espaço

- Determine a equação vetorial da reta r que passar pelos pontos $A(3, -1, 1)$ e $B(2, 1, 2)$.
- Determine a equação simétrica da reta r que passa pelo ponto $A(4, 1, 0)$ e tem direção $\vec{u} = (2, 6, -2)$.
- Escreva a equação paramétrica da reta r nos casos a seguir:
 - r passa pelo ponto $P(-2, -1, 3)$ e tem direção do vetor $\vec{u} = (2, 1, 1)$.
 - r passa pelos pontos $A(1, 3, -1)$ e $B(0, 2, 3)$.
- Verifique se o ponto $A(-1, 0, 2)$ pertence a reta $r : \begin{cases} x = -7 + 2h \\ y = -3 + h \\ z = -7 + 3h \end{cases}$
- Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o ponto P pertence à reta r :
 - $P(-2, 1, 1)$ e $r : X = (1, 0, 0) + h(-1, 2, 1)$
 - $P(2, -1, -7)$ e $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -5 + 2t \end{cases}$
 - $P\left(2, \frac{1}{2}, 3\right)$ e $r : x - 1 = 2(y - 2) = \frac{z}{3}$
- Seja $r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = z$. Determine as equações vetorial e paramétrica dessa reta.
- Dada a reta $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$, determine
 - o ponto de r tal que a ordenada seja 6.
 - o ponto de r tal que a abcissa seja igual à ordenada.
 - o ponto de r tal que a cota seja o quádruplo da abcissa.

0.2 Posição relativa entre retas

8. Verifique se as retas r e s nos casos a seguir são coplanares:

(a) $r : X = (1, 0, 2) + t(1, 4, 7)$ e $s : X = (1, 0, 1) + h : (3, -1, 1)$.

(b) $r : \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z-2}{3}$ e $s : X = (1, -2, 2) + h(0, 1, 3)$.

(c) $r : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 2 - 3h \\ z = h \end{cases}$ e $s : \frac{x-4}{2} = \frac{2-y}{6} = \frac{z-2}{2}$.

9. Estude a posição relativa dos seguintes pares de retas:

(a) $r : \begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$ e $s : X = (1, 0, 2) + h(1, -3, 7)$.

(b) $r : \begin{cases} x = h \\ y = 1 - h \\ z = 4 + 4h \end{cases}$ e $s : \frac{1-x}{2} = \frac{y}{3} = z - 8$.

(c) $r : X = (-2, 1, 3) + t(-10, -2, -18)$ e $s : \frac{x-3}{5} = y-2 = \frac{z-12}{9}$.

(d) $r : X = (4, -3, 1) + h(0, 2, 1)$ e $s : \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

10. Dê a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P(-1, 1, 1)$

e é paralela a reta $s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 5t \\ z = 4 - t \end{cases}$.

11. Mostre que as retas $r : x-2 = -y = z-1$ e $s : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 3 \end{cases}$ são concorrentes e determine o ponto de intersecção.

12. Determine o valor de a para que as retas $r : \frac{x}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{z}{a}$ e $s : \begin{cases} x = 3h - 1 \\ y = 2h - 5 \\ z = h \end{cases}$ sejam concorrentes e ache o ponto de intersecção.

13. Determine a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto $P(1, 2, 3)$; concorrente com a reta $s : X = (-1, 3, 5) + h(2, 5, 1)$ e tem vetor direção \vec{u}_r ortogonal ao vetor $\vec{v} = (0, 1, -4)$.

0.3 Ângulo entre retas

14. Determine os ângulos formados pelas retas r e s , nos seguintes casos:

(a) $r : X = t(1, -1, 1)$ e $s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

(b) $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 \end{cases}$ e $s : \frac{x-3}{2} = y+1 = \frac{z+1}{3}$.

(c) $r : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $s : \frac{x}{2} = y+6 = z-1$.

(d) $r : X = (1, 0, 0) + h(2, 1, -1)$ e $\frac{x-1}{2} = y = -z$.

15. Determine a equação simétrica da reta r que passa pelo ponto $P(1, 1, -2)$ e é perpendicular a reta $s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

16. Determine a equação paramétrica da reta r que passa pelo ponto $P(1, 0, 0)$; é concorrente com a reta $s : X = t(1, 1, 0)$ formando um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ rd.

17. Determine uma equação vetorial da reta s que passa pelo ponto $P(1, 0, 1)$ e intercepta a reta $r : x = y = z + 1$ formando um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ rd.

18. Determine o valor de n para que seja de $\frac{\pi}{6}$ rd o ângulo entre as retas $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$ e $s : X = (0, 5, -2) + t(1, n, 2)$.

19. Sabendo que as retas $r : \begin{cases} x = -3 + 2mt \\ y = 1 + 3t \\ z = -4t \end{cases}$ e $s : \frac{x+1}{2} = y = z - 4$ são perpendiculares, determine o valor de m .

0.4 Distância entre retas

20. Determine $d(Q, r)$ nos seguintes casos:

(a) $Q(1, 1, 0)$ e $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$

(b) $Q(1, 2, 3)$ e $r : X = (0, -7, -4) + t(1, 2, -1)$

21. Calcule $d(r, s)$ nos seguintes casos:

(a) $r : X = (1, 0, 2) + h(1, 1, 1)$ e $s : x - 1 = y + 2 = z - 3$.

(b) $r : X = (3, -1, 1) + t(2, 0, 1)$ e $s : \begin{cases} x = 6 - h \\ y = -2 + h \\ z = 1 + h \end{cases}$

(c) $r : X = (1, 1, 1) + h(-1, 2, 1)$ e $s : X = (1, 1, 3) + t(2, 1, 3)$.

22. Seja $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, 1)$ e $s : \begin{cases} x = ah \\ y = 1 + h \\ z = 2 - h \end{cases}$ Determine o valor de a de modo que $d(r, s) = 0$.

23. Determine os pontos da reta $r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ que distam 6 unidades do ponto $A(2, 1, 3)$.

GABARITO:

1) $\vec{AB} = (-1, 2, 1)$

3) b) $\vec{AB} = (-1, -1, 4)$.

4) sim

5) a) não b) sim c) não

6) $P_0(1, -2, 0)$ e $\vec{u}_r = (2, 4, 1)$.

7) a) $A(-1, 6, -10)$ b) $B\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, -4\right)$ c) $C(-4, 9, -16)$.

8) a) não b) sim c) sim

9) a) reversas b) concorrentes c) paralelas c) paralelas

10) *Dica:* $\vec{u}_r = \alpha\vec{u}_s$ uma vez que as retas são paralelas.

11) $P_0(4, -2, 3)$

12) $a = 1$ e $P_0(2, -3, 1)$

13) $\vec{u}_r = \left(\frac{4}{3}c, 4c, c\right)$.

14) a) 0 b) 0,86 c) 1,38 d) 0

- 15) $x - 1 = y - 1 = \frac{z + 2}{3}$
- 16) $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ou $r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$
- 17) $s : X = (1, 0, 1) + t(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 3, \sqrt{2} - 3)$ ou $s : X = (1, 0, 1) + t(-\sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, -3 - \sqrt{2})$.
- 18) $n = 7$ ou $n = 1$
- 19) $m = \frac{1}{4}$
- 20) a) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ b) $\frac{6\sqrt{14}}{7}$
- 21) a) $\frac{\sqrt{42}}{3}$ b) 0 c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 22) $a = 1$
- 23) $t = 2$